Herramientas algebraicas en el estudio de variedades de contacto homogeneas

Cristina Draper Fontanals
Universidad de Málaga

Una variedad diferenciable M se dice un espacio G-homogéneo si el grupo de Lie G actúa transitivamente en M. En esta charla destacaremos la relevancia de los espacios homogéneos en geometría y por qué -o más bien cómo- las herramientas algebraicas son esenciales para estudiarlos. Ilustraremos cómo la teoría de representaciones de álgebras de Lie permite construir estructuras geométricas en estas variedades, por ejemplo métricas o conexiones afines invariantes.

Algunos de nuestros resultados sobre conexiones con torsión en espacios homogéneos, principalmente en variedades de tipo contacto, pueden encontrarse en [1,2,3,5]. La idea es buscar conexiones que estén adaptadas a la geometría de contacto de algún modo, siguiendo la filosofía de E. Cartan, que defendía que la torsión podría jugar un papel frente al uso habitual de la conexión de Levi-Civita, libre de torsión.

Una familia interesante y sencilla de ejemplos para entender cómo funciona esto son las esferas de dimensión impar vistas como cocientes de grupos unitarios, es decir, pensadas como hipersuperficies de $\mathbb{C}^n$. Estas poseen un campo Killing que ayuda a reescribir las conexiones obtenidas mediante técnicas algebraicas en términos de derivadas covariantes ([1]). Como suele ocurrir, en dimensiones bajas aparecen los ejemplos más interesantes y de mayor excepcionalidad.

BIBLIOGRAFÍA:

(1) C. Draper, A. Garvín and F.J. Palomo, *Invariant affine connections on odd-dimensional spheres*, Ann. Glob. Anal. Geom. **49** (2016), 213–251.
(2) C. Draper, A. Garvín and F.J. Palomo, *Einstein with skew-torsion connections on Berger spheres*, J. Geom. Phys. **134** (2018), 133–141.
(3) C. Draper, M. Ortega and F.J. Palomo, *Affine Connections on 3-Sasakian Manifolds*, Math. Z. **294** (2020), no. 1-2, 817–868.
(4) C. Draper Fontanals, *Homogeneous Einstein manifolds based on symplectic triple systems*, Commun. Math. **28** (2020), no. 2, 139–154.
(5) C. Draper, *Holonomy on 3-Sasakian homogeneous manifolds versus symplectic triple systems*, Transform. Groups **26** (2021), no. 4, 1293–1314.
(6) C. Draper and A. Elduque, *Real simple symplectic triple systems*, Anal. Math. Phys. **12** (2022), no. 3, Paper No. 69.